А.Б. Тимченко, О.В. Тимченко

Адаптивный подход к моделированию стоимости опционов на финансовом рынке

Давно замечено, что при прогнозировании финансовых рынков на небольшие периоды времени прогнозные оценки в наибольшей степени зависят от тенденций, которые проявляются в последние моменты времени. В силу этого наиболее предпочтительными для получения краткосрочных прогнозов считаются адаптивные модели, в которых этому обстоятельству придается существенное значение. Статистика их применения действительно подтверждает эту точку зрения. Специалисты-практики утверждают, что точность адаптивных прогнозов в среднем на два-три процента выше, чем точность прогнозов, полученных традиционными методами. Однако абсолютизирование адаптивных свойств и игнорирование специфики, которая отличает динамику рынка ценных бумаг от динамики других экономических процессов, ограничивают прикладные возможности адаптивного подхода в финансовой сфере.

Рынок производных финансовых инструментов, несомненно, на сегодняшний день можно рассматривать как один из самых важных сегментов финансового рынка. На срочном рынке объемы торгов, как правило, превышают обороты на рынках базисных активов. Существует точка зрения, что такой успех срочные контракты получили в связи с тем, что торговля ими снижает системный риск на рынке финансовых инструментов.

Развитие рыночных моделей инвестирования стало возможным и благодаря взаимосвязи операций, проводимых на срочном рынке, с операциями фондового рынка. Производные финансовые инструменты отличает, прежде всего, гибкость, что дает на их основе новые возможности конструирования сложных финансовых операций.

Задача формирования эффективных стратегий управления риском на финансовом рынке требовала специальных возможностей. Опционы, появившиеся на рынке, инвесторы восприняли как инструмент, использование которого позволяло не только формировать оптимальные стратегии, но и давать им содержательную интерпретацию. Стоит отметить, что открытие сделок на одном рынке для компенсации воздействия ценовых рисков равной, но противоположной позиции на другом рынке, привели к ситуации, когда границы самоуверенности инвесторов достигли области риска, и они стали относить маловероятные события к невозможным. Теоретические положения, несомненно, имеют сложную содержательную интерпретацию, но пренебрежения теорией в последствие привели к ошибкам в выборе оптимальных стратегий. Поэтому одновременно с решением вопросов по развитию срочного рынка возникла необходимость в развитии прикладных аспектов современной теории финансов [2: 211].

Оценка стоимости опциона является довольно сложной задачей и решается, как правило, в предположениях, идеализирующих реальную ситуацию. Использование прогнозных оценок, на наш взгляд, позволит ослабить предположения, лежащие в основе расчетных формул, и повысит правдоподобность получаемой оценки. Чтобы необходимость прогнозирования стала более понятной, рассмотрим ключевые аспекты построения биномиальной модели финансового рынка.

Как известно, все активы рынка делятся на безрисковые и рисковые. Будем предполагать, что безрисковый актив B и рисковый актив S полностью определяются в любой момент времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ своими ценами. Поэтому базисной компонентой финансового рынка является эволюция цен B_t и S_t, осуществляемая в соответствии со следующими уравнениями:

$$\Delta B_t = B_{t-1} \cdot r_f,\ B_0 = 1, \quad (1)$$

$$\Delta S_t = S_{t-1} \cdot r_t,\ S_0 > 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta B_t = B_t - B_{t-1},$$

$$\Delta S_t = S_t - S_{t-1},\ t = 1, 2, \ldots$$

Величина $r_f \geq 0$ представляет собой постоянную безрисковую процентную ставку. Величины $r_1, r_2, \ldots, r_T$ определяют эволюцию цен S_t. Они являются случайными, независимыми и принимают в соответствии с предположением всего два значения $r^н$ и $r^в$ ($r^н < r^в$). Причем эти значения принимаются с вероятностями

$$\mathrm{P}(r_t = r^в) = p,$$

$$\mathrm{P}(r_t = r^н) = 1 - p = q.$$

В более строгом математическом изложении рассматривается вероятностное пространство $(\mathbf{\Omega}, \mathrm{F}_T, \mathrm{P})$, где $\mathbf{\Omega} = (r^н, r^в)$, – пространство элементарных событий, $\mathrm{F}_T = 2^T$ – множество всех подмножеств длины T, формируемых из $\mathbf{\Omega}$ таким образом, что на i-ом месте располагается либо $r^н$ либо $r^в$; P – вероятностная мера, определяемая бернуллиевской вероятностью p. В каждом конкретном случае $\mathbf{F} = (\mathrm{F}_t)_{t \leq T}$ формируется информационным потоком $\mathrm{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\} \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_T$, который принято называть стохастическим базисом случайного эксперимента торгов.

Информационный поток, называемый иногда фильтрацией F, как следует из его описания, порождается доходностями r_i или, что эквивалентно, ценами S_i. Вероятность любого события из F_t индуцируется бернуллиевской вероятностью

$$\mathrm{p}(\mathbf{r}) = p^{\sum I_j} (1-p)^{T - \sum I_j} \quad (3)$$

где

$$I_j = \begin{cases} 1 & r_j = r^в \\ 0 & r_j \neq r^в \end{cases}$$

Приведенное описание (B, S) рынка принято называть биномиальной моделью, или моделью Кокса-Росса-Рубинштейна [1: 207].

Описание финансового рынка с помощью такой модели является абстракцией, позволяющей все многообразие ситуаций разделить на две части, с помощью которых идентифицируются рост и падение рынка. Этого достаточно, чтобы понять механизм формирования цены опционов и построить схему оценки приведенной стоимости, которая принимается за цену платежного обязательства $(S_T - K)^+$ при цене базового актива в момент исполнения опциона *K*.

Используемая для оценки формула Кокса-Росса-Рубинштейна записывается следующим образом:

$$C_T = S_0\,\mathrm{B}(k_0, T, \widetilde{p}) - K(1+r_f)^{-T}\,\mathrm{B}(k_0, T, p^*), \tag{4}$$

где

$$\mathrm{B}(j, T, p) = \sum_{\kappa=j}^{T} C_T^k p^k (1-p)^{T-k}$$

$$p^* = \frac{r_f - r^{н}}{r^{в} - r^{н}},$$

$$\widetilde{p} = \frac{1+r^{в}}{1+r^{н}}\,p^*,$$

$$k_0 = \left[\ln\frac{K}{S_0(1+r^{н})} / \ln\frac{1+r^{в}}{1+r^{н}}\right] + 1.$$

Чтобы оценки стоимости опциона, рассчитанные по формуле Кокса-Росса-Рубинштейна, имели высокую достоверность, необходима реальность всех параметров, используемых в данной формуле. Обычно этот вопрос не обсуждается, но от его решения зависит возможность практического использования результатов моделирования. Ниже предлагается комбинированная прогнозная модель, обеспечивающая бивариантный расчет прогнозных оценок доходностей и вероятностного распределения их реальности.

В прогнозной модели, предназначенной для этих целей, предусматривается две составляющих. С помощью первой осуществляются экстраполяционные расчеты, а с помощью второй оцениваются вероятности возможной реализуемости каждого из вариантов в зависимости от условий, описываемых определенным набором факторов. В общем виде модель записывается следующим образом

$$\hat{y}_{t+1}^k = \mathbf{x}_{t+1}\hat{\mathbf{b}}_t + \mathrm{f}^k\hat{\mathrm{d}}, \quad k = 1,\ 2 \tag{5}$$

$$\mathrm{P}_{t+1}^1 = \frac{\exp(\mathbf{z}_{t+1}\hat{\mathbf{a}})}{1+\exp(\mathbf{z}_{t+1}\hat{\mathbf{a}})}, \tag{6}$$

$$\mathrm{P}_{t+1}^2 = 1 - \mathrm{P}_{t+1}^1 \tag{7}$$

где

$\hat{y}_{t+1}^{k}$ – k-й вариант прогнозной оценки для момента времени $t+1$;

$\mathbf{x}_{t+1}$– вектор значений, описывающий условия, ожидаемые в упреждающем периоде;

$\hat{\mathbf{b}}_{t}$– вектор текущих оценок коэффициентов модели;

P_{t+1}^{1} – вероятность реальности k-го варианта прогнозной оценки для момента времени $t+1$;

k – номер варианта, который в текущий момент оказался наиболее точным;

f^{k} – значение, которое в k-м варианте приняла фиктивная переменная;

$\hat{\mathrm{d}}$ – оценка коэффициента при фиктивной переменной;

$\mathbf{z}_{t+1}$– вектор независимых переменных;

$\hat{\mathbf{a}}$ – вектор оценок параметров логит-модели.

Построение модели осуществляется в два этапа. На первом этапе оцениваются коэффициенты экстраполяционной составляющей (5). Как правило, для этого используется метод наименьших квадратов с применением методологии pretest-оценивания, позволяющей одновременно с оцениванием параметров осуществлять тестирование эффектов роста и падения рынка. По результатам тестирования формируются значения фиктивной переменной

$$f_{t}=\begin{cases}1, & y_{t}-\mathbf{x}_{t}\hat{\mathbf{b}}_{t}>0\\ 0, & y_{t}-\mathbf{x}_{t}\hat{\mathbf{b}}_{t}\leq 0\end{cases},$$

которая включается в состав регрессоров и коэффициенты модели оцениваются заново.

На втором этапе строится модель бинарного выбора. В состав регрессоров этой модели включаются экспертные оценки ожидаемой на рынке ситуации. Оценка параметров модели осуществляется с помощью метода максимального правдоподобия.

Так построенная комбинированная модель позволяет получать прогнозные оценки самых важных характеристик биномиального рынка: варианты ожидаемой стоимости финансовых активов и вероятности реализации этих вариантов. Расчет стоимости опциона на основе прогнозных данных, как правило, оказывается более точен, в том смысле, что получаемые оценки мало отличаются от тех цен, по которым торгуются опционы [3: 161].

Следует отметить, что математический аппарат, который лежит в основе вывода формулы Блэка-Шоулза и построения модели Кокса-Росса-Рубинштейна, достаточно сложен. И эта сложность, в свою очередь, не позволяет инвесторам-практикам широко использовать предложенные модели для определения оптимальной стоимости опционов. Это, вне всякого сомнения, является одним из основных сдерживающих факторов исследований, направленных на совершенствование данного аппарата.

Логика эконометрических измерений требует, чтобы оценки будущей стоимости опционов удовлетворяли условиям существования прогнозных оценок, т.е., по сути, обладали свойствами прогнозных оценок. Полученные оценки выполняют, как правило, роль установленной цены, что требует их однозначного толкования всеми участниками рынка. Стоимость базисного актива формирует стоимость опциона, подверженную рыночным колебаниям, что накладывает определенные требования на инвестиционные решения, связанные с опционами. Возникает необходимость прогнозных обоснований принимаемых решений на финансовом рынке. Используемые для этих целей исторические данные должны подвергаться специальной обработке, предусматривающей их предварительное сглаживание.

Библиографический список

1. Давнис В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. 380 с.
2. Мельников А.В. Математические методы финансового анализа / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. М.: Анкил, 2006. 440 с.
3. Тимченко А.Б. Прогнозирование стоимости финансовых активов и адаптивный анализ их волатильности: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13. Воронеж, 2007. 181 с.