А.Б. Чернышев, В.А. Козлов

Исследование устойчивости распределенных систем с нелинейной характеристикой, независящей от пространственных координат

Для систем с сосредоточенными параметрами нелинейный элемент задается функцией $z=\varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(t)$ выходного сигнала звена: $z(t) = \varphi(\sigma(t))$. Для систем с распределенными параметрами входной сигнал может зависеть не только от времени, но и от пространственных координат. Пусть нелинейный элемент задается функцией $z=\varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(x, y, t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(x,y,t)$ выходного сигнала звена, т.е. $z(x, y, t) = \varphi(\sigma(x, y, t))$.

Для абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной сосредоточенной системы с устойчивой линейной частью (ЛЧ) достаточно существования действительного значения q, для которого выполняется условие [1]:

$$\forall\omega \ge 0 : \mathrm{Re}\left[(1 + j\omega q)W(j\omega)\right] > -\frac{1}{k};$$

где k – угол абсолютной устойчивости, являющийся некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $\varphi(\sigma)$, произвольно располагающейся в заданной области.

$$0 \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \le k, \text{ при } \sigma \ne 0;\ \varphi(0) = 0.$$

Частотная характеристика представляется в виде:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[W(j\omega)].$$

Вводится понятие модифицированной амплитудно-фазовой характеристики линейной части (АФХ ЛЧ).

$$W^*(j\omega) = \mathrm{Re}[W^*(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}[W^*(j\omega)],$$

где

$$\mathrm{Re}[W^*(j\omega)] = \mathrm{Re}[W(j\omega)],\quad \mathrm{Im}[W^*(j\omega)] = \omega\,\mathrm{Im}[W(j\omega)].$$

Модифицированная АФХ отличается от обычной изменением значений мнимой части в ω раз.

Рассмотрим передаточную функцию W для объекта с распределенными параметрами, математическая модель которого имеет вид:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t);\ Q(x,0)=Q_0(x);\ Q(0,t)=q_1(t);$$

$Q(l,t)=q_2(t)$; $0\le x\le l$; $t\ge 0$; $a>0$.

$$W(x,\xi,p)=\frac{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi}{p+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2};$$

Передаточная функция по каждому контуру пространственно-инвариантной системы может быть представлена в виде [2]:

$$W_n(p)=\frac{\frac{2l}{n^2a^2\pi^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi}{\frac{l^2}{n^2a^2\pi^2}p+1},$$

или обозначив, $\psi_n=\frac{\pi n}{l}$:

$$W_n(p)=\frac{\frac{2}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{\frac{p}{a^2\psi_n^2}+1};$$

заменяя $p=j\omega$, получим комплексный передаточный коэффициент по n-ой ($n=\overline{1,\infty}$) составляющей входного воздействия.

$$W_n(j\omega)=\frac{\frac{2}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{j\omega\frac{1}{a^2\psi_n^2}+1};$$

Выделим действительную и мнимую части.

$$W_n(j\omega)=\frac{\frac{2}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)\left[1-\frac{j\omega}{a^2\psi_n^2}\right]}{1+\frac{\omega^2}{a^2\psi_n^2}}$$

$$\frac{\frac{2}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)-\frac{2j\omega\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{la^4\psi_n^4}}{1+\frac{\omega^2}{a^2\psi_n^2}}=$$

$$\frac{\frac{2}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{1+\frac{\omega^2}{a^2\psi_n^2}}-j\frac{\frac{2\omega}{la^4\psi_n^4}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{1+\frac{\omega^2}{a^2\psi_n^2}}=-j\frac{\frac{2\omega}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}$$

Получим:

$$\operatorname{Re}\left[W(j\omega)\right]=\frac{\frac{2}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}\qquad \operatorname{Im}\left[W(j\omega)\right]=-j\,\frac{\frac{2\omega}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}$$

Согласно условию Попова: $\operatorname{Re}\left[(1+j\omega q)W(j\omega)\right]>-\frac{1}{k}$, получим:

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{\frac{2}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}+j\,\frac{\frac{2\omega q}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}-j\,\frac{\frac{2\omega}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}+\frac{\frac{2\omega^2 q}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{\frac{2}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}+\frac{\frac{2\omega^2 q}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n\xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}=\operatorname{Re}\left[W(j\omega)\right]-\omega q\operatorname{Im}\left[W(j\omega)\right].$$

Обозначим: $X=\operatorname{Re}\left[W(j\omega)\right]$, $Y=\omega\operatorname{Im}\left[W(j\omega)\right]$,
тогда
$X-qY+\frac{1}{k}=0$ – уравнение прямой в прямоугольной системе координат OXY.

Введем в систему координат ось $\psi^2_n=\tilde{G}\cdot\tilde{G}(n)$ – дискретная функция с областью изменения от $\tilde{G}_H$ до $\tilde{G}_K$;

$$\psi_n^2=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2;(n=1,2,3...);\ \tilde{G}_H=\frac{\pi^2}{l^2};\ \tilde{G}_K\to\infty.$$

Заменим $\tilde{G}$ непрерывной функцией G с областью определения $[\tilde{G};\infty)$. В этом случае при изменении G охватятся все дискретные значения функции $\tilde{G}$.

Предположим, что нелинейная характеристика объекта не зависит от функции $\tilde{G}=\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, т.е. от параметра n. Другими словами, вид и форма нелинейной характеристики остаются неизменными для каждой гармоники разложения передаточной функции в ряд Фурье. Тогда для каждого значения n получим прямую в системе координат $OXY\tilde{G}$. Угловой коэффициент q для всех прямых не зависит от значения $\tilde{G}$. Длина отрезка $\frac{1}{k}$, отсекаемого каждой из полученных прямых по оси OX, также не зависит от значения $\tilde{G}$. Следовательно, все полученные прямые параллельны между собой и находятся на одинаковом расстоянии от оси G, т.е., образуют плоскость в системе координат $OXYG$.

В [3] показано, что пространственно-инвариантную систему управления можно представить как совокупность независимых контуров управления по каждой пространственной моде входного воздействия. Если каждый контур асимптотически устойчив, то и система управления в целом устойчива. В каждой плоскости Γ, параллельной плоскости OXY, для каждого значения n ($n=\overline{1,\infty}$) вектор $W(j\omega)$ опишет годограф при изменении значения ω от 0 до ∞. Определим модуль комплексной передаточной функции:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{2\omega}{la^2\psi_n^2}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)}{a^2\psi_n^2+\omega^2}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{l^2}\left(\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)\right)^2 + \frac{4\omega^2}{l^2 a^4 \psi_n^4}\left(\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)\right)^2}}{a^2\psi_n^2+\omega^2} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{l^2}\left(\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)\right)^2\left(1+\frac{\omega^2}{a^4\psi_n^4}\right)}}{a^2\psi_n^2+\omega^2} = \frac{\frac{2}{l}\sin(\psi_n x)\sin(\psi_n \xi)\sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^4\psi_n^4}}}{a^2\psi_n^2+\omega^2}.$$

Для графической иллюстрации анализа устойчивости по критерию Попова необходимо построить модифицированный пространственный годограф, отличающийся изменением значений мнимой части в ω раз.

Таким образом, при сделанных допущениях, критерий Попова для систем с распределенными параметрами может быть интерпретирован следующим образом [4, 5]:

Для абсолютной устойчивости нелинейной распределенной системы, при условии, что нелинейная характеристика не зависит от пространственных координат, достаточно, чтобы модифицированный пространственный годограф разомкнутой системы лежал справа от плоскости, проходящей через линию $L: \left\{\omega \operatorname{Im}(W) = 0; \operatorname{Re}(W) = -\frac{1}{k}; G\right\}$, *под углом* $\alpha = arctg\frac{1}{q}$ *к плоскости* $\{\operatorname{Re}(W), G\}$.

В этом случае частотная характеристика каждого контура системы управления будет лежать правее прямой $\mathrm{Re}(W) - q\omega\,\mathrm{Im}(W) + \frac{1}{k} = 0$.

Следовательно, каждый контур системы управления будет устойчив, а значит, будет устойчива и вся система. Однако параметр k, характеризующий угол абсолютной устойчивости, ограничивающий сектор нелинейной характеристикиможет зависеть от значения обобщенной координаты G, поэтому вопрос о возможности интерпретации частотного критерия абсолютной устойчивости для нелинейных систем с распределенными параметрами при нелинейной характеристике, зависящей от пространственных координат объекта управления, требует дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Душин С.Е., Зотов Н.С., Имаев Д.Х. и др.; Теория управления. под ред. В.Б. Яковлева. М.: Высшая школа, 2003.
2. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2003.
3. Першин И.М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: РИА-КМВ, 2007.
4. Чернышев А.Б. Исследование нелинейных систем с распределенными параметрами. Кисловодск: Изд-во МИЛ, 2009.
5. Чернышев А.Б. Адаптация частотного критерия абсолютной устойчивости к системам с распределенными параметрами //Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 13-18.